光ファイバー(2)

波多腰玄一

1 はじめに

前回は，光ファイバー[1〜4]における固有値方程式の解のうち，次数lが0となるTEモードとTMモードについて，その解析法，Excelによる計算法，平板光導波路との比較を述べた。今回は$l \geq 1$の場合のモードの分類と，その解析法について述べる。

2 光ファイバーのモードの分類

階段屈折率光ファイバーにおけるモードの実効伝搬定数βに対する固有値方程式については前章で紹介した。これについては次節で再度述べる。この固有値方程式はこれまでに紹介したニュートン法により数値的に解を求めることができる。ここではニュートン法で用いる式を求める前に，解の分類を考えてみよう。

前章の式(15)でE_zとH_zの係数をA_l，B_lとした。E. Snitzerは，この比B_l/A_lに比例する以下のパラメーターPを用いて光ファイバーのモードを記述している[4]。

$$P \equiv -\frac{\omega\mu_0}{\beta}\frac{B_l}{A_l} \tag{1}$$

ここでもこのPを用いて，電界$\boldsymbol{E}$，磁界$\boldsymbol{H}$の各成分を表すことにする。以下では$A_l=1$とし，$e^{i(\omega t-\beta z)}$の項は省略する。また式の表記を簡単にするため，以下のようにベッセル関数などを省略して記載することにする。

$$J_l \equiv J_l(\kappa r) \tag{2a}$$

$$K_l \equiv K_l(\gamma r) \tag{2b}$$

$$c_l \equiv \cos(l\theta) \tag{2c}$$

$$s_l \equiv \sin(l\theta) \tag{2d}$$

すると前章の式(15)〜(17)は以下のようになる[†1]。

$$E_z = \begin{cases} J_l c_l & (r \leq a) \\ a_l K_l c_l & (r \geq a) \end{cases} \tag{3a}$$

$$E_r = \begin{cases} -\dfrac{i\beta}{2\kappa}\left\{(1-P)J_{l-1} - (1+P)J_{l+1}\right\} c_l & (r \leq a) \\ -\dfrac{i\beta}{2\gamma} a_l \left\{(1-P)K_{l-1} + (1+P)K_{l+1}\right\} c_l & (r \geq a) \end{cases} \tag{3b}$$

$$E_\theta = \begin{cases} \dfrac{i\beta}{2\kappa}\left\{(1-P)J_{l-1} + (1+P)J_{l+1}\right\} s_l & (r \leq a) \\ \dfrac{i\beta}{2\gamma} a_l \left\{(1-P)K_{l-1} - (1+P)K_{l+1}\right\} s_l & (r \geq a) \end{cases} \tag{3c}$$

$$H_z = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} P \times \begin{cases} J_l s_l & (r \leq a) \\ a_l K_l s_l & (r \geq a) \end{cases} \tag{4a}$$

$$H_r = \begin{cases} -iQ_1\left\{(1-P_1)J_{l-1} + (1+P_1)J_{l+1}\right\} s_l & (r \leq a) \\ -iQ_2 a_l \left\{(1-P_2)K_{l-1} - (1+P_2)K_{l+1}\right\} s_l & (r \geq a) \end{cases} \tag{4b}$$

†1 Snitzerの論文[4]とはいくつかの符号が異なることに注意。Snitzerの論文では時間依存性を$e^{-i\omega t}$としている。一方，本連載では時間依存性を$e^{+i\omega t}$としているため，電界，磁界の各成分の符号も異なる。