ウィグナー分布関数

波多腰玄一

1 はじめに

第9回，第10回のビーム品質の章で紹介したM^2因子[1〜3]は，ビームの空間分布と空間周波数分布から決まるビーム広がり角により定義された。空間分布と空間周波数分布の両方を位相空間上に表す関数としてウィグナー分布関数（Wigner distribution function）がある。

ウィグナー関数はもともと，量子力学における波動関数と古典的位相空間における位置座標と運動量の確率分布とを結びつける実関数で，ウィグナー（Eugene Paul Wigner）により導入された[4]。量子力学における物理量$\hat{A}$を演算子を用いずに位相空間で表したものがウィグナー表示（ウィグナー関数）で，$\hat{A}$が密度行列の場合に特にウィグナー分布関数と呼ぶ場合もある。ファインマン（R. P. Feynman）は量子計算機に関する検討の中で，量子系を古典計算機で確率論的にシミュレーションできる可能性に関連して，密度行列とウィグナー関数に言及している[5]。

ウィグナー分布関数は，フーリエ光学で空間座標における局所的空間周波数分布を表す関数として利用される[6]。またこれを用いてビーム品質指標のM^2因子を定義することもできる。以下ではウィグナー分布関数およびM^2因子との関連について述べる。

2 ウィグナー分布関数

簡単のため1次元の場合について述べると，位置座標をx，運動量をp_xとして，複素関数$\psi(x)$に対するウィグナー分布関数$W(x, p_x)$は次式で与えられる[6,7]。

$$W(x,p_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(x+\frac{\hbar}{2}\xi_1\right)\psi^*\left(x-\frac{\hbar}{2}\xi_1\right)\exp(-ip_x\xi_1)d\xi_1 \tag{1}$$

$\psi(x)$が光波の波動関数の場合，

$$p_x = \hbar k_x \tag{2}$$

$$\hbar\xi_1 \equiv \xi,\ \ \hbar W(x,p_x) \equiv f(x,k_x) \tag{3}$$

とおくと$f(x, k_x)$は以下で表される。

$$f(x,k_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(x+\frac{\xi}{2}\right)\psi^*\left(x-\frac{\xi}{2}\right)\exp(-ik_x\xi)d\xi \tag{4}$$

この$f(x, k_x)$は実関数で以下の性質を持っている。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k_x)dk_x = \left|\psi(x)\right|^2 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k_x)dx = \left|\Psi(k_x)\right|^2 \tag{6}$$

ただし$\Psi(k_x)$は$\psi(x)$のフーリエ変換で，

$$\Psi(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\exp(ik_x x)dx \tag{7}$$

3 エルミート-ガウスビームとウィグナー分布関数

エルミート-ガウスビームについてウィグナー分布関数がどのようになるかをみてみよう。$\psi(x)$として第8章の式(4)を代入すると，