光の伝搬(3)

波多腰玄一

1 はじめに

前回は円柱座標系での解として得られる円筒波を紹介した。今回は球座標系で得られる球面波について述べる。

2 球面波

⑴球座標系

前章のように円柱座標を用いると円筒波の解が得られた。そこで次に球座標ではどうなるかを見てみよう。図1に示したように，球座標系（r, θ, ϕ）と直交座標系との関係は以下の通りである。

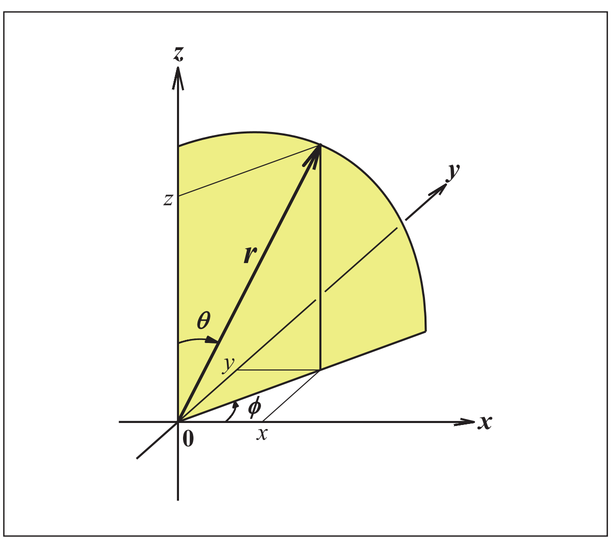

図1　球座標系

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{1a}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{1b}$$

$$z = r\cos\theta \tag{1c}$$

前章の波動方程式およびヘルムホルツ方程式を再度記載すると

$$\nabla^2 U - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla^2 U_1 + k^2 U_1 = 0 \tag{3}$$

ただし

$$U_1 = U\exp(i\omega t) \tag{4}$$

式⑶を球座標系で表すと以下のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r}\\ &+\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U_1}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_1}{\partial^2\phi}\right\}\\ &+k^2 U_1 = 0\end{aligned} \tag{5}$$

ここで U_1 を以下のように球座標で変数分離する。

$$U_1 = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{6}$$

円柱座標系の場合と同様に，$\Phi(\phi)$ については周期境界条件から，前章の式⒃と同様の