光の伝搬(2)

波多腰玄一

1　はじめに

前回は光の伝搬の基礎として，平面波を取り上げた。平面波は，マクスウェル方程式およびそれから導かれる波動方程式の解である。今回は円柱座標系での解として得られる円筒波を紹介する。

2　波動方程式と光導波路

(1)波動方程式と座標系

マクスウェル方程式から以下の波動方程式が導かれることを前回述べた（前章の式(7)，(8)）。

$$\nabla^2 U - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

電荷や電流がない場合（$\rho=0$，$\boldsymbol{j}=0$）には，電界$\boldsymbol{E}$および磁界$\boldsymbol{H}$の各成分$E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$はいずれも式(1)の解である。ここで時間依存性を$\exp(i\omega t)$とおいた場合を考える。すなわち

$$U = U_1(x, y, z)\exp(i\omega t) \qquad (2)$$

そうすると式(1)は以下のヘルムホルツ方程式になる。

$$\nabla^2 U_1 + k^2 U_1 = 0 \qquad (3)$$

ここで

$$k^2 \equiv \omega^2 \varepsilon\mu = k_0^{\ 2} n^2 \qquad (4)$$

前回取り上げた平面波は，式(3)を直交座標系で変数分離した場合の解に相当する。

それでは別の座標系で考えるとどうなるだろうか。今回は円柱座標系（r, ϕ, z）を考える。直交座標系（デカルト座標系）（x, y, z）との関係は

$$x = r\cos\phi \qquad (5a)$$

$$y = r\sin\phi \qquad (5b)$$

である（図1参照）。

式(3)のU_1を円柱座標で変数分離すると，円筒波の解が得られる。円柱座標が適用される例としては，一番単純なのは平面波の場合と同様の一様な自由空間であるが，それ以外にもz方向に層構造を持つ光導波路[1,2]などが考えられる。

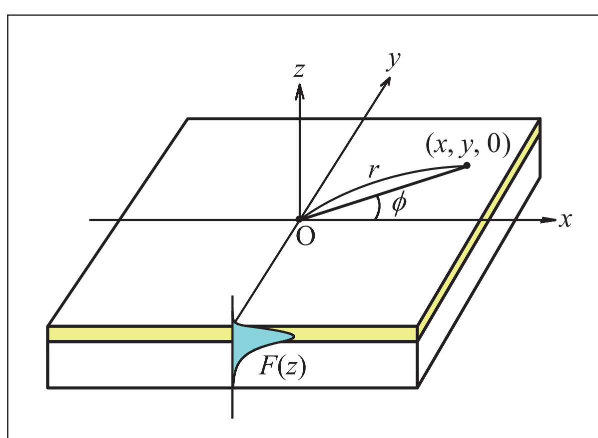

図1　光導波路と座標系