黒体放射

波多腰玄一

1 はじめに

前回述べた状態密度は，黒体放射の式や電子密度の計算に用いられる。今回はこの黒体放射について述べる。

一般に物理量Xがあるパラメーターε（例えばエネルギー）の関数として表される場合，$X(\varepsilon)$の平均値$\langle X \rangle$は状態密度$g(\varepsilon)$と分布関数$f(\varepsilon)$とを用いて，次式で表される。

$$\langle X \rangle = \int X(\varepsilon) g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \tag{1}$$

ここで分布関数というのは，例えばエネルギーがεと$\varepsilon + \Delta\varepsilon$との間にある粒子の個数が$f(\varepsilon)\Delta\varepsilon$で表される場合の関数$f(\varepsilon)$のことである。そこでまずこの分布関数が光や電子でどのように表されるかということから始める。

2 フェルミ粒子とボース粒子

量子力学的粒子はフェルミ粒子とボース粒子に分類される。フェルミ粒子は一つの量子状態を2つ以上の粒子が同時に占めることができない粒子であり，ボース粒子は一つの量子状態を複数の粒子が同時に占めることのできる粒子である。それぞれの分布関数は，フェルミ-ディラック統計およびボース-アインシュタイン統計に従う。よく知られているように，電子はフェルミ粒子，光子はボース粒子である。周波数νの光のエネルギーは$h\nu$を単位としてとびとびの値をとる。ここでhはプランク定数である。この量子化された光のエネルギーを光子（photon）と呼んでいる[†1]。

まず重要な仮定として，粒子がエネルギーε_nの量子状態にある確率$p(\varepsilon_n)$は以下のボルツマン因子[1, 2]で表される[†2]。

$$p(\varepsilon_n) = \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right) \tag{2}$$

ここでk_Bはボルツマン定数，Tは絶対温度である。これを用いると，エネルギーε_nの状態をN個の粒子が占める確率は$p(N\varepsilon_n)$に比例することになるので，エネルギーε_nを占める粒子の平均個数$\overline{N}(\varepsilon_n)$は次式で与えられる。

$$\overline{N}(\varepsilon_n) \equiv f(\varepsilon_n) = \frac{\sum_N N \exp\left(\frac{-N\varepsilon_n}{k_B T}\right)}{\sum_N \exp\left(\frac{-N\varepsilon_n}{k_B T}\right)} \tag{3}$$

式(3)で定義される$f(\varepsilon_n)$が分布関数に相当する。

前章で，単位体積あたりの状態密度は体積を無限大にしても変わらないことを述べた。同様に分布関数も自由空間で式(3)のように表される。その場合にはε_nは連続と見做してさしつかえない。そこで以下ではε_nを単にεと書くことにする。

さて，フェルミ粒子ではNは0または1の値しかとることができないので，式(3)は

†1 光がボース粒子ではなく，エネルギー量子としての光子がボース粒子である。

†2 式(2)は温度Tの定義から導くことができる[1, 2]。ここではむしろ式(2)を温度Tの定義と見做すこともできる。